

Poker – gra szczęścia czy umiejętności?

Przegląd analiz teoretycznych i empirycznych oraz wnioski dla regulacji

MIKOŁAJ CZAJKOWSKI*

Streszczenie

Na temat tego, czy poker jest grą szczęścia (losową) czy grą umiejętności toczy się w Polsce i na świecie ożywiona dyskusja, także akademicka. Od rozstrzygnięcia tej kwestii uzależnia się zakwalifikowanie pokera na równi z grami hazardowymi i jego penalizację. Artykuł stara się odpowiedzieć na to pytanie na podstawie naukowej analizy – badań teoretycznych, symulacyjnych, eksperymentalnych i empirycznych poświęconych tematyce gry w pokera, a w szczególności jego najbardziej popularnej odmianie Texas Hold'em. Wyniki jednoznacznie wskazują, że choć w grze występuje element losowy, w długim okresie to umiejętności odgrywają kluczową rolę, niemniejszą niż w przypadku np. dyscyplin sportowych. Poruszany jest problem kwantyfikacji losowości pokera – minimalnego okresu, po jakim umiejętności zyskują przewagę nad szczęściem. Proponowane jest także bardziej pragmatyczne podejście do regulacji, opierające się nie tyle na udziale losowości w grze, co na rachunku zysków i strat, z uwzględnieniem wyceny kosztów i korzyści zewnętrznych, takich jak wpływy z podatków, miejsca pracy, dobrobyt konsumentów, oraz przestępstwa i uzależnienia związane z pokerem, a w przypadku delegalizacji – pokerowym podziemiem.

* Uniwersytet Warszawski, Wydział Nauk Ekonomicznych, email: miq@wne.uw.edu.pl

Wstęp

Zainteresowanie grą w pokera osiąga w ostatnich latach, również w Polsce, niespotykany wcześniej poziom. Coraz więcej ludzi grywa w pokera, zarówno w towarzyskich grach ze znajomymi jak i w internecie. W prasie, radio i telewizji pojawiają się poświęcone tej tematyce informacje i relacje z coraz liczniejszych turniejów. Poker wnika także do kultury masowej, co znajduje odzwierciedlenie np. w przenikaniu pokerowego żargonu do języka potocznego, licznych odniesieniach do tej gry w kinie czy pojawianiu się aplikacji do gry w pokera w komórkach i portalach społecznościowych.

Poker od dawna przyciągał uwagę naukowców – w szczególności ekonomistów, matematyków i specjalistów od teorii gier. Jedni z twórców tej dyscypliny ekonomii – Von Neumann i Morgenstern – twierdzili, że ich przełomowy i interdyscyplinarny podręcznik z 1944 roku „Theory of Games and Economic Behavior” inspirowany był pokerem (von Neumann i Morgenstern, 1944). O matematycznej i ekonomicznej analizie pokera pisali noblista Nash z Shapleyem (1950), Kuhn (1950) i wielu innych (np. McDonald, 1950; Newman, 1959; Goldman i Stone, 1960; Binmore, 1992; Mazalov i Makhankov, 2001; Dinkin i Gitomer, 2002; Kuhn i Nasar, 2002; Schmidt, 2002). Trudno o bardziej realistyczny przykład gry, w której wynik zależy nie tylko od przyjętej przez gracza strategii, lecz także strategii przyjętych przez innych graczy, a więc typowego przedmiotu rozważań teorii gier.

Poker cieszy się także dużym zainteresowaniem specjalistów od sztucznej inteligencji. Podjęto wiele prób stworzenia programów komputerowych, które byłyby w stanie grać w pokera (np. Billings *et al.*, 2002). Jak dotąd żaden program nie jest jednak w stanie grać w pokera tak dobrze jak najlepsi z ludzkich graczy. Dla porównania jest wiele programów do gry w szachy, które są w stanie grać przynajmniej tak samo dobrze jak arcymistrzowie. W przypadku szachów – gry z pełną informacją – programy komputerowe osiągają dzięki czystej mocy obliczeniowej, możliwe jest bowiem przeszukiwanie drzewa gry w poszukiwaniu najlepszych, w danej sytuacji, wyborów. Poker jest grą z niepełną informacją, dlatego moc obliczeniowa przestaje wystarczać. Wydaje się, że poker wymaga szeregu ‘ludzkich’ umiejętności, a optymalna strategia wymaga w szczególności adaptacji do

zachowania przeciwników. Między innymi to ta cecha pozwala ludzkim graczom rozpoznawać i eksploatować algorytmy stosowane przez programy komputerowe.²

Ogólnie rzecz biorąc gry (w tym gry hazardowe) można podzielić na gry czysto losowe, w których wynik nie zależy od umiejętności – takie jak ruletka, bingo, jednoręki bandyta czy loterie, oraz na gry, w których element umiejętności występuje. Wyróżniającą cechą tych pierwszych jest to, że niezależnie od podejmowanych decyzji wynik (wyplata) gracza pozostaje taki sam. Strategia nie ma wpływu na oczekiwany wynik. W szczególności w takie gry nie da się z premedytacją przegrać. W przypadku gier umiejętności, strategia stosowana przez gracza ma wpływ na jego wynik w długim okresie. Nie oznacza to, że w takie gry pozbawione są elementu losowości. Oznacza to tylko, że w długim okresie różnice wynikające z poszczególnych losowań (np. siły rozdanych kart) się niwelują, a zatem wygrywają gracze, którzy są lepsi, a nie ci, którzy mieli szczęście.

Ustawa z dnia 19 listopada 2009 r. o grach hazardowych (Ustawa... 2009) delegalizuje grę w pokera na pieniądze pomiędzy graczami i, nakładając liczne wymogi administracyjne i podatkowe, praktycznie uniemożliwia organizację turniejów pokerowych, w których możliwe są do wygrania nagrody. W myśl tej kontrowersyjnej ustawy, gra w pokera została potraktowana nawet surowiej niż gry hazardowe, takie jak ruletka, bingo czy loterie, które nadal są legalne, choć opodatkowane. Także w innych krajach poker bywa traktowany jako gra hazardowa (czy 'losowa'), choć ustawodawstwo i wyroki sądów są w tej sprawie bardzo zróżnicowane. Przeglądu istniejących regulacji i wyroków sądów w USA, Wielkiej Brytanii, Niemczech i Holandii dokonują Kelly *et al.* (2007) oraz Cabot i Hannum (2005).

² Innymi ważnymi umiejętnościami, którymi powinien charakteryzować się dobry gracz w pokera, a które tak trudno zakodować w postaci programu komputerowego, to: ocena siły własnej 'ręki' (w zależności ilości innych graczy, pozycji, historii wcześniejszych zachowań tych graczy, warunkowego prawdopodobieństwa możliwych rąk przeciwników w kontekście ich obserwowanych zachowań w rozdaniu), ocena potencjału ręki (z uwzględnieniem tzw. implikowanych szans, jako funkcji historii zachowań przeciwników), wybór optymalnego schematu zachowań (z uwzględnieniem wartości oczekiwanej i przewidywań przeciwników dotyczących zachowań gracza), blefowanie (w zależności od prawdopodobieństwa różnych reakcji przeciwnika) i pozostawanie nieprzewidywalnym (kluczowego czynnika pozwalającego na maskowanie siły własnej ręki w długim okresie). Dobra gra w pokera wymaga więc od gracza szeregu umiejętności – zdolności matematycznych, psychologicznych, oceny sytuacji i zachowania w warunkach ryzyka i niepewności, czy odpowiedniego zarządzania funduszami przeznaczonymi na grę (ang. *bankroll management*).

Na temat regulacji gry pokera w Polsce i w innych krajach toczy się ożywiona dyskusja. Zwolennicy regulacji twierdzą, że poker jest grą losową i wobec tego powinien być traktowany tak samo jak inne gry losowe, takie jak ruletka, jednoręki bandyta czy loterie. Zwolennicy deregulacji utrzymują, że poker to przede wszystkim gra umiejętności, tak jak brydż, wiele dyscyplin sportu, czy pozbawione elementu losowości szachy, i w związku z tym regulacja jest niewskazana.

Jak jest naprawdę – czy poker to gra szczęścia czy umiejętności? Skoro w pokera z całą pewnością można z premedytacją przegrać, to osiągnięty wynik zależy od przyjętej strategii. W związku z tym, w długim okresie w pokera wygrywać będą gracze, którzy są lepsi (ich umiejętności są na wyższym poziomie), a nie ci, którzy mieli szczęście. Interesującym pytaniem jest jednak – jak duży jest element losowości w pokerze, a co za tym idzie – jak długi jest ‘długi okres’. Ten artykuł stara się odpowiedzieć na to pytanie na podstawie naukowej analizy i dostępnych badań empirycznych, poświęconych zdecydowanie najpopularniejszej odmianie tej gry – No Limit Poker Texas Hold ‘em.

1. Zasady pokera

W pokera w wersji Texas Hold ‘em gra się w od dwóch do 10 osób. Celem gry jest zdobycie puli (ang. *pot*) – sumy zakładów (ang. *bet*) dokonywanych przez graczy w ciągu jednej gry. Pulę można zdobyć na dwa sposoby – podczas ostatecznego sprawdzenia i porównania pięciokartowych układów ułożonych z siedmiu dostępnych dla każdego gracza kart (ang. *showdown*), albo poprzez założenie takiego zakładu, że wszyscy inni gracze spásują, tracąc jednocześnie swoje prawo do partycypacji w puli uzbieranej z wcześniejszych zakładów.

W kolejnych rozdaniach dealerem jest kolejny z graczy, zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Zwykle dwie pierwsze osoby za dealerem muszą złożyć niewielki zakład w ciemno, jeszcze przez obejrzeniem swoich dwóch prywatnych kart (te zakłady nazywane są z ang. *small blind* i *big blind*). Na początku rozdania każdy z graczy otrzymuje dwie ‘prywatne’ karty, które pozostają znane tylko jemu. Następnie odbywa się pierwsza runda licytacji. Podczas każdej z rund licytacji każdy z graczy może

spasować, czekać, albo wnieść zakład, który pozostali gracze muszą co najmniej wyrównać. Runda licytacji kończy się, gdy wszyscy pozostający w grze gracze wyrównali najwyższy zakład (lub postawili wszystkie swoje żetony, jeśli mieli ich za mało). Wysokość łącznych zakładów powiększa pulę, którą można na koniec gry wygrać. Po pierwszej rundzie licytacji dealer odkrywa trzy karty, widoczne dla wszystkich. W kolejności następują: druga runda licytacji, odsłonięcie czwartej karty, trzecia runda licytacji, odsłonięcie piątej karty, czwarta runda licytacji i ewentualnie sprawdzenie. Na koniec każdy z graczy może wybrać dowolnych 5 spośród 7 dostępnych mu kart. Jeśli w grze pozostaje tylko jeden gracz – wygrywa on niezależnie od układów kart.

Siła pięciokartowych układów oceniana jest według następującego rankingu:

- poker – pięć kart po kolei w jednym kolorze,
- kareta – cztery karty tej samej wartości,
- full – trzy karty tej samej wartości wraz z parą kart o innej (lecz takiej samej) wartości,
- kolor – pięć kart w jednym kolorze,
- dtrit – pięć kart po kolei,
- trójka – trzy karty tej samej wartości,
- dwie pary – dwie pary kart tej samej wartości,
- para – para kart tej samej wartości,
- najwyższa karta,

przy czym znaczenie ma tylko starszeństwo kart, a nie kolor, w jakim posiada się karty czy układ. O sile układu decyduje najwyższa karta w układzie, a jeśli ta jest taka sama – kolejne. Jeśli dwóch graczy posiada taki sam układ o zwycięstwie decydują dodatkowe karty pozostające poza układem, ale tylko do łącznej liczby 5 kart. Jeśli nawet po wzięciu ich pod uwagę układy są takie same, następuje podział puli.

Zainteresowany czytelnik może znaleźć bardziej szczegółowy opis zasad, a także analizy optymalnych strategii w licznych podręcznikach przeznaczonych dla graczy (np. Harrington i Robertie 2004, 2005, 2006, 2008a, 2008b; Sklansky i Miller, 2006).

2. Uproszczona wersja pokera – argumenty analityczne

Istnieje wiele analiz gry w pokera, w których znacznie upraszcza się tę grę, aby umożliwić jej kompletny matematyczny opis i teorio-grową analizę (np. von Neumann i Morgenstern, 1944). Celem większości tych prac jest znalezienie optymalnej strategii gracza. Jedną z najciekawszych prac dotyczących umiejętności w pokerze przedstawił Alon (2007). Posługując się uproszczoną wersją gry przeanalizował jaki wpływ mają umiejętności, a więc wybór optymalnej strategii, na wyniki graczy. W szczególności, autorów interesowało to, jaka jest przewaga gracza umiejętnego nad początkującym. Choć przedstawiony przez nich model jest znacznym uproszczeniem rzeczywistej złożoności pokera, już ta analiza pozwala na wyciągnięcie wniosków, które przenoszą się także na rzeczywistą grę. Poniżej przedstawiono to rozumowanie.

Rozważmy grę, w której każdy z dwóch graczy otrzymuje swoje 2 karty, a na stole wykładanych jest od razu 5 wspólnych kart. W tej wersji pokera jest tylko jedna runda licytacji, następująca po odkryciu wszystkich 5 wspólnych kart. Każdy z graczy ma możliwość postawienia 1 żetonu lub spasowania; decyzje podejmowane są jednocześnie. Jeśli przynajmniej jeden z graczy zdecydował się postawić – wygrywa ten z graczy pozostających w grze, którzy ma najwyższy układ. Załóżmy, że w tę grę gra dwóch graczy – A i B. B jest graczem bez żadnych umiejętności, który gra losowo (z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ obstawia i z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ pasuje). A – gracz ‘profesjonalny’ – spodziewa się, jaką strategię stosuje B i wybiera taką strategię, aby w tych warunkach maksymalizować swoją wygraną. W tej sytuacji A powinien stawiać tylko wtedy, gdy jego wartość oczekiwana z zakładu jest większa niż zero – wtedy, gdy jego karty są lepsze niż ręka przeciętna.

Jeśli A i B stosują strategie takie jak opisano powyżej to przynajmniej jeden z nich pasuje z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$. A zatem z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$ wygrana A jest równa 0, z prawdopodobieństwem $\frac{3}{16}$ jest równa +1, a z prawdopodobieństwem $\frac{1}{16}$ równa -1. Wobec tego, choć cała gra jest grą o sumie zerowej, A osiąga oczekiwaną wygraną z każdego rozdania równą $\frac{1}{8}$, z wariancją równą $\frac{15}{64}$. Umiejętności pozwalają osiągnąć istotną przewagę.

Załóżmy teraz, że B zorientował się, że przegrywa, uznał, że strategia A jest lepsza od jego własnej i postanowił ją zastosować – stawia zakład tylko wtedy, gdy jego ręka jest lepsza od przeciętnej. A, gracz posiadający więcej umiejętności, orientuje się, że B zmienił strategię i odpowiednio dopasowuje swoją – decyduje się postawić 1 żeton tylko wtedy, gdy jego ręka jest lepsza niż $\frac{3}{4}$ przeciętnych rąk, co maksymalizuje jego oczekiwaną wypłatę. Wynosi ona teraz $\frac{1}{16}$ z wariancją równą $\frac{31}{256}$, a więc znów A osiąga przewagę nad B.

Warto zwrócić uwagę, że w tej rozgrywce B stosuje dokładnie tę samą strategię, którą wcześniej stosował A. Przykład ten pokazuje, że nawet dla tak uproszczonej gry wygrywający gracz powinien być w stanie dopasować swoją strategię do strategii przeciwnika (lub przeciwników); obrazuje także znaczenie pozostawania nieprzewidywalnym – w przypadku, gdy strategia gracza stanie się czytelna dla innych, mogą oni to wyeksploatować. Choć zasady te zobrazowano za pomocą bardzo uproszczonej wersji pokera, przenoszą się one, choć w znacznie bardziej wyrafinowany sposób, na rzeczywistego pokera. Umiejętności – rozumiane jako umiejętność kalkulacji, adaptacji do strategii przeciwnika, myślenia na wielu poziomach i bycia nieprzewidywalnym – są kluczowymi atrybutami gracza, który wygrywa.

3. Empiryczna analiza typowych rozdań pokerowych

Hope i McCulloch (2009) prezentują prostą analizę statystyczną przeszło 103 milionów rozdań rozegranych w serwisie PokerStars od 1 Grudnia do 2008 roku do 2 Stycznia 2009 roku. Analizą objęto tylko gry na pieniądze (nie turnieje i nie gry na wirtualne pieniądze) o dowolnej liczbie graczy przekraczającej 2. Uwzględniono tylko gry na blindy w wysokości 0,05 USD lub wyższe przyjmując, że w grach o niższych stawkach większość graczy jest niedoświadczona i dopiero eksperymentuje z grą, co mogłoby zaburzać wyniki. Celem autorów było sprawdzenie, w jakim stopniu siła ręki jest determinantą wygranej. Jeśli siła otrzymanych kart (szczęście) ma znaczenie drugorzędne, oznacza to, że o zwycięstwie decydują inne czynniki (umiejętności graczy).

Na podstawie zebranych danych Hope i McCulloch pokazują, że w 75,7% przypadków gra kończy się bez ostatecznego sprawdzenia (ang. *showdownu*) – każdy z graczy zna tylko swoje i część lub wszystkie z kart wspólnych, nie zna natomiast kart przeciwników. Sytuacja taka ma miejsce, gdy w grze pozostaje tylko jeden gracz, który automatycznie zgarnia wygraną, niezależnie od układu kart – wszyscy pozostali gracze pasują.

W 24,3% przypadków, w których dochodzi do *showdownu*, tylko 50,3% z nich wygranych jest przez gracza, który w danej rozgrywce byłby w stanie utworzyć najmocniejszy układ z wykorzystaniem swoich dwóch kart. Pozostałe wygrywane są przez słabsze układy, w rezultacie wcześniejszego spasowania graczy, którzy mieliby na koniec mocniejsze ręce, lecz z różnych powodów zdecydowali się nie uczestniczyć w dalszej rozgrywce.

Autorzy konkludują, że wynik większości gier determinowany jest nie przez siłę rozdanych kart, skoro najczęściej zwycięzcą zostaje jeden z graczy bez porównania kart. Tylko w około 12% przypadków gracz o najsilniejszym układzie wygrywa poprzez *showdown*. Można to traktować jako pierwszą wskazówkę dotyczącą znaczenia umiejętności w grze w pokera.

4. Empiryczna analiza wyników graczy turniejowych

Croson *et al.* (2008) przeanalizowali na ile deterministycznie gracze zajmują miejsca w turniejach pokerowych o wysokie wygrane. Ich celem była weryfikacja, czy kolejność miejsc zajmowanych w turniejach jest losowa, czy relatywnie deterministyczna, jako benchmark wykorzystując wyniki turniejów w golfa, który powszechnie uważany jest za grę umiejętności. Jeśli niektórzy gracze regularnie zajmują czołowe miejsca, a wyniki turniejów w pokera nie są bardziej losowe niż wyniki turniejów w golfa, wskazuje to na znaczenie umiejętności w grze w pokera.

Autorzy przeanalizowali wyniki 899 graczy, którzy dotarli do dwóch stolików finałowych (a więc przynajmniej 18. miejsca) w jednym z 81 turniejów dla profesjonalistów³ rozgrywanych w latach

³ *Buy-in* co najmniej 3000 USD: World Series of Poker, World Poker Tour, World Poker Open.

2001-2005. Analogiczna analiza została przeprowadzona dla wszystkich 48 turniejów w golfa organizowanych przez Professional Golfers' Association.

Skonstruowany model ekonometryczny miał na celu weryfikację, czy wcześniejsze wyniki graczy są dobrymi zmiennymi objaśniającymi ich kolejne wyniki. Do estymacji wykorzystano klasyczną metodę najmniejszych kwadratów (OLS) z odpornymi błędami standardowymi, aby uwzględnić możliwość heteroskedastyczności, oraz uporządkowany model probitowy. Modele oszacowano w trzech wersjach, gdzie zmienną objaśnianą było miejsce gracza, zaś zmiennymi objaśniającymi były: *doświadczenie* – zmienna zerojedynkowa przyjmująca wartość 1, jeśli gracz zajął jedno z pierwszych 18 miejsc w jakimkolwiek wcześniejszym turnieju, *wyniki* – przyjmująca wartość równą ilości wcześniejszych turniejów w których gracz zajął jedno z pierwszych 18 miejsc oraz *ranking* – zmienna równa średniemu miejscu, które gracz zajął we wcześniej rozegranych turniejach. Wyniki zaprezentowano w Tabeli 1.

Tabela 1. Wyniki modelu objaśniającego deterministyczność zajmowanych miejsc w turniejach w pokera i golfa (w nawiasach podano błędy standardowe)

	Turnieje w pokera			Turnieje w golfa		
	<i>doświadczenie</i>	-0,781 ^{***} (0,278)			-1,420 ^{***} (0,382)	
<i>wyniki</i>		-0,225 ^{***} (0,098)			-0,222 ^{***} (0,089)	
<i>ranking</i>			0,203 ^{***} (0,050)			0,033 (0,056)
stała	9,810 ^{***} (0,173)	9,707 ^{***} (0,166)	7,189 ^{***} (0,490)	10,270 ^{***} (0,331)	9,743 ^{***} (0,253)	8,566 ^{***} (0,595)
R ²	0,5%	0,9%	2,8%	1,6%	1,2%	0,1%
Liczba obserwacji	1494	1494	595	811	811	586

*** – zmienne istotne statystycznie na poziomie 1%

Źródło: opracowanie własne na podstawie Croson *et al.* (2008)

Analiza przeprowadzona dla pokera wskazuje, że (1) to, czy gracz kiedykolwiek wcześniej zajął jedno z pierwszych 18. miejsc w turnieju, (2) to, jak wiele razy zajął wcześniej jedno z pierwszych 18. miejsc i (3) to, które miejsce średnio zajmował we wcześniejszych turniejach pokerowych w istotny sposób pozwala przewidywać które miejsce zajmie w kolejnym turnieju. Wcześniejsze sukcesy w

istotny sposób pozwalają przewidywać kolejne, co wskazuje, że umiejętności graczy mają znaczenie – gdyby gracze bazowali jedynie na szczęściu taki wynik nie byłby możliwy.

Jak dużo jest umiejętności w grze pokerowych profesjonalistów turniejowych? Na ocenę tego pozwala porównanie wartości współczynników dla pokera i golfa. Współczynniki dla zmiennej *doświadczenie* nie są istotnie różne statystycznie⁴, podobnie – współczynniki dla zmiennej *wyniki*⁵. Zmienna *ranking* była dla turniejów pokerowych w ogóle nie istotna, w przeciwieństwie do turniejów pokerowych⁶, co może wskazywać na to, że to jak dany gracz plasuje się w rankingu ma większe znaczenie dla jego kolejnych wyników w pokerze niż w golfie.

Podsumowując należy również zauważyć, że ogólne dopasowanie obu modeli (R^2) jest bardzo niskie. Wskazuje to na to, że przewidywanie wyniku gracza w turnieju jest zadaniem trudnym i w dużym stopniu losowym, a przynajmniej trudnym do wyjaśnienia za pomocą obserwowalnych zmiennych. Można jednak stwierdzić, że skoro przyjmuje się, że umiejętności w stosunku do losowości mają istotne znaczenie w turniejach w golfa, w turniejach w pokera mają przynajmniej taką samą wagę. Stanowi to potwierdzenie sloganu jednego z serwisów pokerowych – Full Tilt Poker: “We play because poker is not a scratch-off ticket, a half-court jumper, or a knock on wood. It’s no game of luck, poker. It’s a game of patience and well-timed aggression. We know when we play, a little luck helps. But luck can’t explain why final tables have so many familiar faces.”

5. Analiza eksperymentalna

Innej ciekawej analizy znaczenia umiejętności w pokerze dostarcza DeDonno i Dettermana (2008). Autorzy zastosowali narzędzia ekonomii eksperymentalnej, aby w kontrolowanych warunkach sprawdzić, czy umiejętności faktycznie mają znaczenie – czy uzyskanie profesjonalnych wskazówek w formie szkolenia pozwala początkującym graczom osiągać wyższe wygrane, niż graczom pozbawionym takich wytycznych. W tym celu zaprosili 41 studentów jednego z amerykańskich

⁴ Na poziomie 5%, $t=1,35$

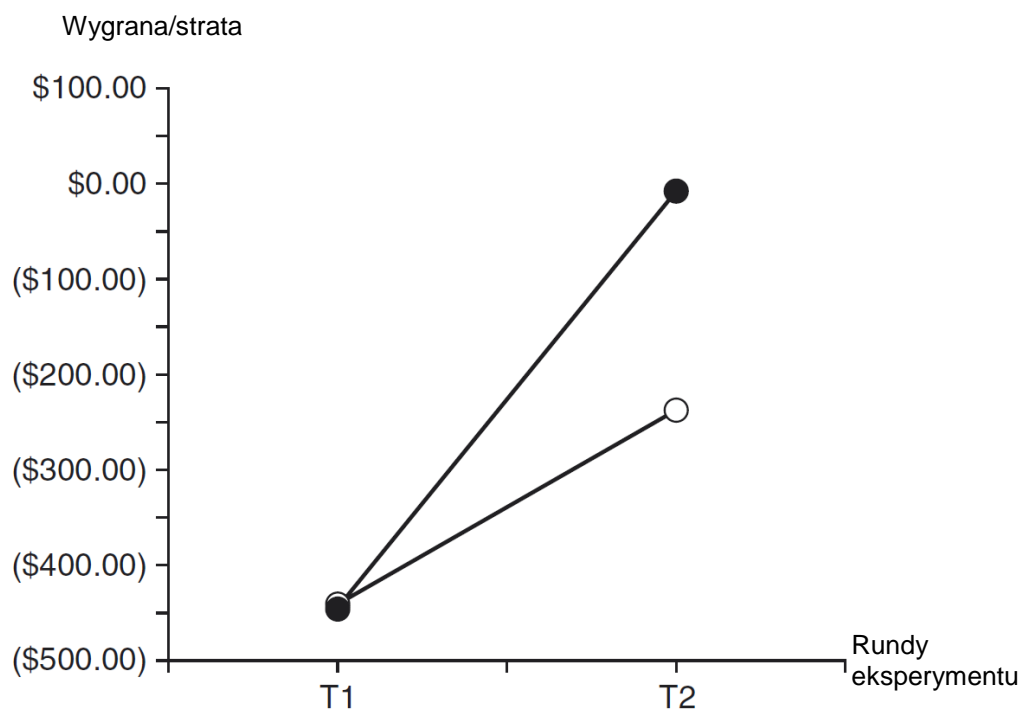
⁵ Na poziomie 5%, $t=0,10$

⁶ Zależność jest istotna statystycznie na poziomie 5%, $t=2,24$.

uniwersytetów do wzięcia udziału w eksperymencie, w którym każdy z nich miał zagrać 8 gier po 25 rozdań (łącznie 200 rozdań) przy użyciu programu komputerowego. Po pierwszej rundzie gier (100 rozdaniach) połowa uczestników otrzymała szkolenie poświęcone wartości rąk startowych i inne podstawowe informacje na temat elementów optymalnej strategii, takich jak znaczenie pozycji i analizy zachowań przeciwników. Druga połowa uczestników została w tym czasie zapoznana z filmem dokumentalnym poświęconym historii pokera. Następnie uczestnicy wrócili do gry i rozegrali kolejną rundę gier (także 100 rozdań). Porównanie zmian wyników gier z obu części eksperymentu pomiędzy dwoma grupami pozwala na wyciągnięcie ostrożnych wniosków dotyczących znaczenia możliwych do nauczenia zachowań pozwalających na zwiększenie wygranych.

Wyniki przeprowadzonego przez autorów eksperymentu pokazały, że studenci, którzy zostali zapoznani ze szkoleniem na temat strategii, w drugiej rundzie eksperymentu osiągnęli znacząco lepsze wyniki niż ci, którzy w tym czasie oglądali film dokumentalny poświęcony historii pokera. Rezultaty te obrazuje Wykres 1.

Wykres 1. Wyniki grup eksperymentu DeDonno i Dettermana (2008)



Źródło: DeDonno i Detterman (2008)

Wyniki eksperymentu, podsumowane na Wykresie 1, wskazują na kilka ciekawych zależności. Po pierwsze, obie grupy z czasem poprawiały swoje wyniki – wygrane z pierwszej rundy gier były zdecydowanie niższe niż z drugiej, co wskazuje na istotny element uczenia się w pokerze. Po drugie, grupa, która poddana została szkoleniu pomiędzy rundami uzyskała znacznie lepsze wyniki w drugiej rundzie, niż grupa, która nie miała okazji zapoznać się ze szkoleniem. Po trzecie, warto zauważyć, że ostatecznie żadna z grup nie była w stanie wygrać pieniędzy. Umiejętności zdobyte w formie uczenia się (podczas 200 rozdań eksperymentu), ani nawet uzyskane szkolenie nie były wystarczające do pokonania graczy symulowanych przez komputer, z czym doświadczeni gracze nie mają problemów.

Podsumowując, eksperyment pokazał, że zarówno doświadczenie jak i wiedza na temat pokera odgrywają istotne znaczenie w osiąganych wynikach, a zatem poker nie jest jedynie grą, w której można liczyć na szczęście. Należy jednak zauważyć, że ze statystycznego punktu widzenia wyniki te nie są jeszcze przekonującym dowodem. Zakładając, że średnie wygrane grup są prawdziwe, uczestnicy musieliby zagrać przynajmniej 552 rozdania, aby wyniki były istotne statystycznie na poziomie 0,90.

6. Analiza symulacyjna

Dotychczasowe rozważania wskazują na to, że umiejętności odgrywają w grze w pokera pewną rolę. Interesującym pytaniem jest jednak – jak dużą rolę. Na to pytanie spróbowali odpowiedzieć Cabot i Hannum (2005), którzy z wykorzystaniem oprogramowania komputerowego przeprowadzili kilka komputerowych symulacji, każda licząca 1 milion rozdań, w których brali udział ‘gracze’ o różnym poziomie zaprogramowanych umiejętności.

W symulowanych rozgrywkach uczestniczyło 10 graczy, blindy wynosiły 20 i 40 USD, zaś prowizję pobieraną przez kasyno (*rake*) i napiwki dla dealera ustalono na poziomie 10%. Symulacje rozegrane były w kilku wersjach, m.in: (a) wszyscy gracze mieli jednakowy, wysoki poziom umiejętności, (b)

jeden z 10 graczy był początkujący, a pozostali mieli wysokie i jednakowe. Wyniki tych symulacji zaprezentowano w Tabelach 2a i 2b.

Tabela 2a. Symulacja wygranych dla jednakowych (profesjonalnych) graczy

Gracz	Wygrana / strata netto [USD]	Rake i napiwki	Wygrana netto na godzinę
Gracz profesjonalny	-334 894,00	343 415,25	-10,05
Gracz profesjonalny	-346 532,00	344 229,25	-10,40
Gracz profesjonalny	-328 375,00	343 629,75	-9,85
Gracz profesjonalny	-296 552,00	344 694,75	-8,90
Gracz profesjonalny	-411 625,00	342 338,50	-12,35
Gracz profesjonalny	-347 796,00	344 439,00	-10,43
Gracz profesjonalny	-374 198,00	342 726,25	-11,23
Gracz profesjonalny	-328 993,00	345 687,50	-9,87
Gracz profesjonalny	-326 625,00	343 979,25	-9,80
Gracz profesjonalny	-344 045,00	344 490,00	-10,32
Razem	-3 439 635,00	3 439 629,50	-10,32

Źródło: opracowanie własne na podstawie Cabot i Hannum (2005)

Tabela 2b. Symulacja wygranych dla początkującego i jednakowych (profesjonalnych) graczy

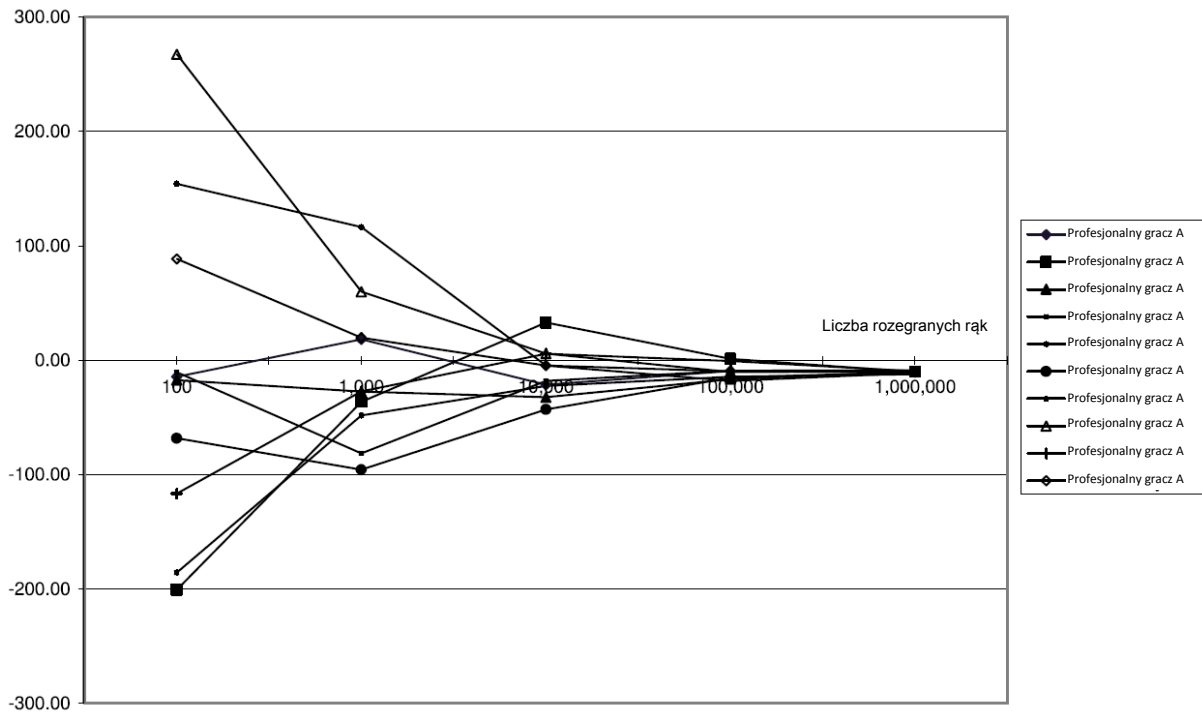
Gracz	Wygrana / strata netto [USD]	Rake i napiwki	Wygrana netto na godzinę
Gracz profesjonalny	3 584 822,00	228 930,45	107,54
Gracz profesjonalny	3 877 059,00	241 824,70	116,31
Gracz profesjonalny	4 131 923,00	256 680,40	123,96
Gracz profesjonalny	4 370 139,00	271 111,45	131,10
Gracz profesjonalny	4 568 198,00	277 895,75	137,05
Gracz profesjonalny	4 767 025,00	288 992,70	143,01
Gracz profesjonalny	4 666 069,00	289 569,30	139,98
Gracz profesjonalny	4 674 592,00	287 429,55	140,24
Gracz profesjonalny	4 478 122,00	276 053,20	134,34
Gracz początkujący	-42 608 284,00	1 071 843,00	-1 278,25
	-3 490 335,00	3 490 330,50	-10,47

Źródło: opracowanie własne na podstawie Cabot i Hannum (2005)

Wyniki zaprezentowane w Tabeli 2a pokazują stosunkowo wyrównane wygrane graczy. Jeśli wszyscy mają wyrównany poziom umiejętności to istniejące różnice można przypisać statystycznemu próbkowaniu (losowi / szczęściu). W przypadku jednak, gdy przy stole znalazł się gracz o niższym poziomie umiejętności (Tabela 2b) wypłaty znacząco się zmieniają. Po rozegraniu 1 miliona rąk początkujący gracz stracił przeszło 42,6 miliony, w odróżnieniu od graczy profesjonalnych, którzy wygrali średnio po 4,2 miliona netto.

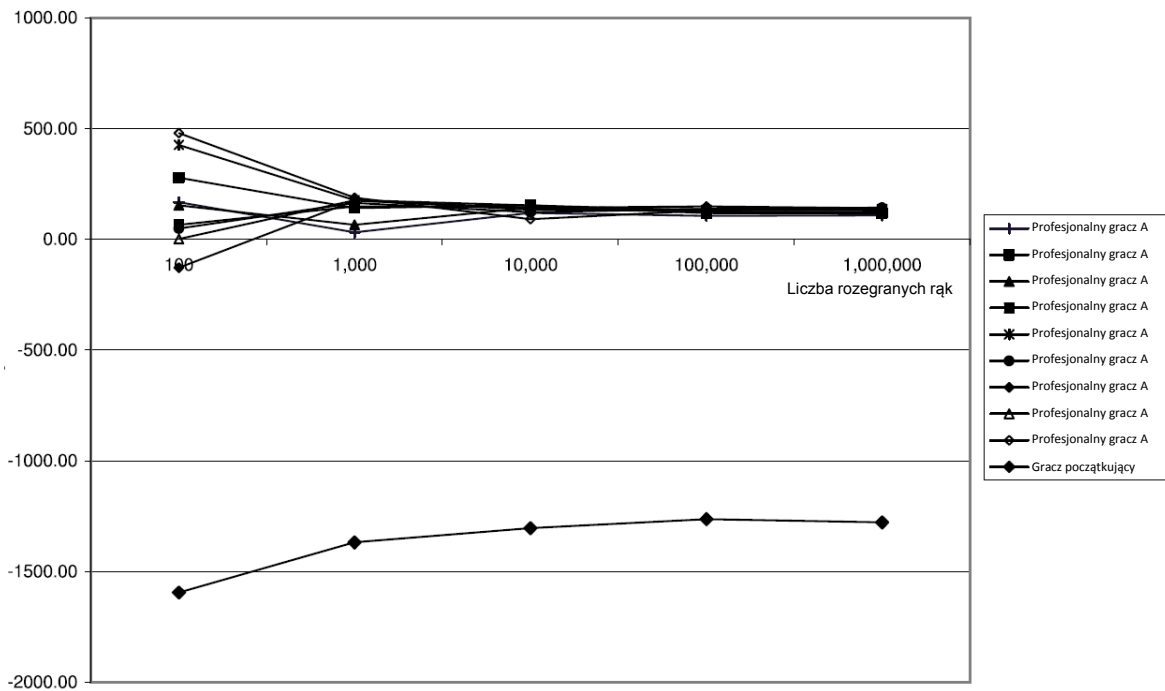
Zaprezentowane wyniki symulacji są spodziewane – po tak dużej liczbie rąk umiejętności z pewnością mają przewagę nad szczęściem, którego wpływ się wyrównuje. Jak dużo gier trzeba jednak rozegrać, aby umiejętności zaczęły dominować? Obrazują to Wykres 2a i 2b.

Wykres 2a. Wygrane na godzinę – jednakowi (profesjonalni) gracze [USD]



Źródło: opracowanie własne na podstawie Cabot i Hannum (2005)

Wykres 2b. Wygrane na godzinę – początkujący i jednakowi (profesjonalni) gracze [USD]



Źródło: opracowanie własne na podstawie Cabot i Hannum (2005)

Analiza Wykresu 2a pokazuje, że obserwowane początkowo różnice pomiędzy wygranymi graczy o jednakowych, wysokich umiejętnościach, które wynikają z losowości otrzymywanych kart (szczęścia), stopniowo się zacierają. Jest to spodziewany efekt wyrównywania się wpływu szczęścia na wyniki graczy, które ponieważ gracze mieli jednakowe poziomy umiejętności – zbliżają się do siebie. Wykres 2b pokazuje analogiczną sytuację dla stołu, przy którym jeden z graczy jest początkujący. Już dla pierwszych 100 rozdań jego wynik jest drastycznie różny od wyników wszystkich graczy profesjonalnych. Ta rozbieżność w osiągniętych wynikach utrzymuje się wraz ze zwiększaniem liczby rozegranych gier – wpływ losowości niweluje jedynie różnice pomiędzy graczami profesjonalnymi, którzy w symulacji mieli jednakowy poziom umiejętności.

Podsumowując, przeprowadzona analiza symulacyjna pozwala na wyciągnięcie dwóch wniosków. Po pierwsze, obrazuje kluczowe znaczenie umiejętności dla wysokości wygranych w pokera. Analogiczna analiza przeprowadzona dla gier czysto-losowych z oczywistych względów nie wykazałaby różnic w oczekiwanych wygranych graczy, w zależności od stosowanej strategii. Na przykład dla ruletki, niezależnie od poziomu umiejętności gracza i przyjętej strategii, jego wartość oczekiwana każdego zakładu wynosi $-5,3\%$ postawionej kwoty (dla ruletki ‘amerykańskiej’, z podwójnym zerem), niezależnie od umiejętności lub przyjętej strategii. Po drugie, przewaga graczy o wyższym poziomie umiejętności staje się tym bardziej wyraźna, im więcej zostaje rozegranych rąk. Intuicyjne ‘wyrównywanie się szczęścia w długim okresie’ jest po prostu efektem Centralnego Twierdzenia Granicznego. Skutki jego działania można obserwować po pierwsze jako malejące prawdopodobieństwo, że gracz początkujący osiągnie wyższą łączną wygraną niż profesjonalny, a po drugie jako zacieranie się różnic pomiędzy łącznymi wygranymi graczy o jednakowym poziomie umiejętności.

7. Znaczenie i pomiar umiejętności

Pomijając prowizję kasyna, poker jest grą o sumie zerowej. W związku z tym spodziewać się można, że wygrane nie zależą od absolutnego, lecz od relatywnego poziomu umiejętności gracza – jego

poziomu umiejętności w odniesieniu do umiejętności innych graczy. W przypadku rozgrywki gracza początkującego i profesjonalnego można się spodziewać, że skoro różnica ich umiejętności jest duża, także ich oczekiwane wygrane będą znacznie różne, a wpływ losowości (szczęścia) niewielki. Jeśli jednak przy jednym stole spotkają się podobni gracze, z których jeden będzie tylko nieznacznie lepszy od drugiego, różnica ich oczekiwanych wygranych będzie mniejsza, a zatem można się spodziewać, że wariancja wyników (wpływ szczęścia) będzie miał większe znaczenie.

Zagadnienie losowości w pokerze jest jeszcze bardziej skomplikowane. Wariancja wyników wynika bowiem nie tylko z tego, że gracze otrzymują losowe karty (*zewnętrzna losowość*). Dla profesjonalnej gry kluczowe znaczenie ma bycie nieprzewidywalnym, co w praktyce sprowadza się do stosowania strategii mieszanych, w których różne działania w danej sytuacji wybierane są z określonym prawdopodobieństwem. Losowość wyboru różnych zagrań przez przeciwników (i samego gracza) jest zatem dodatkowym źródłem wariancji wygranych (*wewnętrzna losowość*). To spostrzeżenie jest zgodne z obserwacjami praktycznymi graczy – grając z przeciwnikami, którzy są nieprzewidywalni i których w pokerowej nomenklaturze można sklasyfikować jako *'loose aggressive'* można spodziewać się wyższej wariancji, niż grając z przewidywalnymi przeciwnikami.

Podjęto wiele prób kwantyfikacji umiejętności i szczęścia (losowości) w pokerze, po to aby ocenić który z tych czynników ma dominujące znaczenie. Dreef *et al.* (2003) zaproponowali teoretyczny sposób na pomiar tego, w jakim stopniu umiejętności determinują wynik gry. Ich miara 'umiejętności' zdefiniowana została w oparciu o koncepcję relatywności umiejętności. Dzieliąc graczy na początkujących (takich, którzy opanowali tylko zasady gry i stosują najprostszą strategię), profesjonalnych (stosujących teoretycznie optymalną strategię) i super-graczy (*a priori* znających realizacje wszystkich 'losowań' i stosujących optymalną w takim przypadku strategię) można porównać ich oczekiwane wyniki, aby ocenić, w jakim stopniu zdeterminowane są przez umiejętności, a na ile są losowe.

Oznaczając oczekiwane wygrane tak zdefiniowanych graczy jako: U_{BEG} – oczekiwana wygrana gracza początkującego, U_{PRO} – oczekiwana wygrana gracza profesjonalnego i U_{MAX} – oczekiwana

wygrana super-gracza można oddzielić wpływ efektu umiejętności $EU = U_{PRO} - U_{BEG}$, od efektu losowości $ES = U_{MAX} - U_{PRO}$. Posługując się tak zdefiniowanymi pojęciami autorzy proponują miarę relatywnego znaczenia umiejętności, jako stosunku wpływu umiejętności do łącznego wpływu umiejętności i losowości:

$$RU = \frac{EU}{EU + ES} = \frac{U_{PRO} - U_{BEG}}{U_{MAX} - U_{BEG}}. \quad (1)$$

Zarówno wpływ umiejętności, jak i losowości jest nieujemny, a zatem $RU \in [0,1]$. Jeśli efekt umiejętności jest równy zero to $RU = 0$, a zatem mamy do czynienia z grą czysto losową. Jeśli gra pozbawiona jest elementu losowości to $RU = 1$ i grę można określić jako czysta gra umiejętności.

Chociaż konstrukcja ta jest z teoretycznego punktu widzenia ciekawa, może mieć zastosowanie tylko do bardzo uproszczonych gier w pokera. W przypadku bardziej gier bliższych rzeczywistości nie jest bowiem jasne jaką strategię powinien stosować gracz początkujący oraz jaka jest optymalna strategia gracza profesjonalnego. Sprawa staje się jeszcze bardziej skomplikowana, jeśli dopuścimy możliwość uczestnictwa więcej niż 2 graczy i efekt wewnętrznej losowości, wynikającej z losowości decyzji podejmowanych przez graczy stosujących strategie mieszane (Dreef *et al.*, 2004; Hendrickx *et al.*, 2008). W przypadku realistycznej gry w pokera wskaźnik ten staje się niestety niepraktyczny.

Bazując na podobnym podejściu Fiedler i Rock (2009) zaproponowali miarę minimalnej liczby powtórzeń gry (ang. *critical repetition frequency*, CRF), pozwalających graczowi na osiągnięcie przewagi umiejętności nad losowością. Jako miarę umiejętności przyjęli oni wartość oczekiwaną gracza i z rozegrania n rąk (skorygowaną o prowizję kasyna, tzw. *rake*) – E_{ni} . Za miarę umiejętności przyjęli natomiast odchylenie standardowe (σ_{ni}) pomnożone przez stałą λ , pozwalającą na uzyskanie odpowiedniego poziomu istotności testu. Tak skonstruowane wskaźniki są inne dla każdego gracza i zależą od relatywnych różnic między umiejętnościami danego gracza, a

umiejętnościami jego przeciwników. E_{ni} może przyjmować wartości dodatnie dla wygrywających, i ujemne dla przegrywających graczy, nie ma to jednak znaczenia dla rozstrzygnięcia, czy osiągnięty wynik jest dziełem przypadku przy umiejętności.

Posługując się tymi miarami można zdefiniować udział umiejętności w wynikach gracza i w n rozegranych grach jako:

$$RU_{ni} = \frac{EA_{ni}}{EA_{ni} + \lambda \sigma_{ni}}. \quad (2)$$

Powyższy wzór ilustruje wcześniej przedstawioną zależność – skoro wartość oczekiwana jest addytywna ($|E_{ni}| = |E_{n1}| \cdot n$), a odchylenie standardowe nie ($\lambda \sigma_{ni} = \lambda \cdot \sigma_{n1} \cdot \sqrt{n}$), to zwiększanie liczby gier powoduje, że statystycznie coraz większe znaczenie mają umiejętności, a coraz mniejsze – szczęście. Dla nieskończonej liczby rozdań szczęście w ogóle nie będzie miało znaczenia, a zatem w długim okresie poker jest z całą pewnością grą umiejętności.

Jak długi jednak jest ten ‘długi okres’? Fiedler i Rock (2009) proponują ustalenie tego w oparciu o to, po ilu rozdaniach (n) wartość wskaźnika RU_{ni} gracza osiąga wartość krytyczną równą 0,5.⁷

Przekształcając (2) otrzymujemy miarę minimalnej liczby powtórzeń gry dla danego gracza (CRF):

$$n_i^* = CRF_i = \left(\frac{\lambda \sigma_{1i}}{E_{1i}} \right)^2. \quad (3)$$

⁷ Oczywiście dla gier w pełni losowych CRF będzie nieskończony, ponieważ wartość relatywnej oczekiwanej wygranej każdego gracza jest równa zero.

Dla różnych wartości λ otrzymać można CRF o różnym poziomie istotności, np. dla $\lambda = 1$ $\alpha = 0,683$, a dla $\lambda = 2$ $\alpha = 0,955$.

Dla prostych gier, relatywna wartość oczekiwana i odchylenie standardowe mogą być wyznaczone teoretycznie. Poker Texas Hold'em jest na to zdecydowanie zbyt złożony, można jednak posłużyć się w tym celu danymi empirycznymi. Fiedler i Rock (2009) dokonują takiej kalibracji w oparciu o dane o rozdaniach 51761 graczy serwisów pokerowych Poker Stars i Party Poker zebranych od kwietnia do lipca 2008 roku. W analizie uwzględniono tylko dane z rozgrywek 4 do 6 graczy i tylko dla średnich stawek (*blindy* w wysokości 2-10\$), uznając niższe stawki za zbyt losowe (niemal wyłącznie początkujący gracze) podczas gdy dla wyższych dostępnych było zbyt mało obserwacji.

W celu wyznaczenia oczekiwanej wygranej zauważono, że gracze o wyższych umiejętnościach grają częściej, a rozkład graczy o różnych wygranych charakteryzuje się silną skośnością – wielu przegrywających gra niewiele rąk, ponieważ systematycznie tracąc zmuszeni są do powrotu na niższe stawki. Graczy podzielono więc na grupy w zależności od tego, ile rąk rozegrali w badanym okresie, a następnie wyznaczono medianę ich bezwzględnych stóp zysku, wyrażonych jako średnia liczba big blindów (BB) wygranych na jedno rozdanie⁸⁹. Wyniki podsumowuje Tabela 3.

Tabela 3. Wygrane, odchylenia standardowe i wskaźnik CRF dla różnych grup graczy

Grupa graczy	Liczba graczy	$ \tilde{E}_{li} $	$\tilde{\sigma}_{li}$	$CRF_{0,955}$
Wszyscy gracze	51 761	0,6354	8,6243	1 658
Gracze o ponad 100 rozegranych rękach	22 548	0,2753	8,6243	8 832
Gracze o ponad 1000 rozegranych rękach	5 138	0,1070	8,6243	58 468
Gracze o ponad 10 000 rozegranych rękach	934	0,0686	8,6243	142 246
Gracze o ponad 45 555 rozegranych rękach	100	0,0577	8,6243	201 065

⁸ Taką miarę wygranych zastosowano, aby zniwelować absolutne różnice wynikające z różnych stawek w badanym zakresie.

⁹ Wygrane skorygowane są o prowizję internetowych serwisów pokerowych (rake).

Mediana skorygowanej wygranej wszystkich graczy wyniosła -0,3231 BB na rozdanie, podczas gdy dla 100 graczy o najwyższej liczbie rozegranych rozdań wyniosła +0,0511. Obrazuje to przewagę umiejętności graczy grających dużo (najwięcej rozdań w badanym okresie). Jednocześnie wyniki te obrazują asymetrię w absolutnych wartościach wygranych graczy – stopa zysku wygrywających graczy jest relatywnie niska (średnio ok. 5 BB na 100 rozdań), podczas gdy gracze przegrywający zwykle robią to na dużą skalę (średnio -32 BB na 100 rozdań)¹⁰.

To czy gracz wygrywa czy przegrywa nie ma znaczenia dla oceny, na ile losową, a na ile deterministyczną grą jest poker. Ważny jest jedynie stosunek wartości oczekiwanej do wariancji wygranych. Jeśli więc jakiś gracz dużo przegrywa i ma przy tym małą wariancję – dla niego będzie to gra w mniejszym stopniu losowa, niż dla gracza, który przy takiej samej wariancji niewiele wygrywa. W szczególności, jeśli wartość oczekiwana gracza z każdego rozdania wynosi 0, poker będzie dla niego grą czysto losową.

W ujęciu przedstawionym przez Fiedlera i Rocka (2009) jest to uwzględnione poprzez wykorzystanie w wyznaczeniu *CRF* bezwzględnej wartości oczekiwanej. Tabela 3 prezentuje wartości bezwzględne średnich wartości bezwzględnych graczy różnych kategorii. Analiza wskaźnika *CRF* tych grup potwierdza wcześniejsze przypuszczenia – im większa wartość bezwzględna wartości oczekiwanej wygranej na rozdanie gracza, tym mniejszą liczbę rozdań musi on zagrać, aby wpływ ‘umiejętności’ (*RU*) na osiągnięte wyniki stał się większy niż 50%. W rezultacie, z uwagi na asymetrię wysokości bezwzględnych wygranych graczy przegrywających i wygrywających, dla tych pierwszych poker jest grą w mniejszym stopniu losową, niż dla tych drugich. Ilustrując to spostrzeżenie przykładem, gracz dużo przegrywający szybko się o tym przekona (jego brak umiejętności szybko weźmie górę nad losowością pokera), podczas gdy gracz o umiarkowanych wygranych musi rozegrać kilkaset tysięcy rozdań, aby jego przewaga umiejętności zaczęła mieć relatywnie większe znaczenie, niż efekt losowości. Biorąc pod uwagę, że w grze na żywo rozgrywa się średnio około 30 rozdań na godzinę, a w internecie około 100, daje to dla najlepszych graczy z omawianej próby odpowiednio 6667 i 2000

¹⁰ Większość graczy przegrywających traci dużo i szybko, po czym wraca na niższe stawki. Gracze wygrywający statystycznie wygrywają niewiele na rozdanie, ale duża liczba rozegranych rozdań pozwala im osiągać przyzwoite zyski.

godzin. Ponieważ w internetowych kasynach typowe jest granie na 4-8 stołach jednocześnie, poker staje się dla nich grą, w której zaczynają dominować umiejętności już po kilku tygodniach regularnej gry.

Podsumowanie

Złożoność pokera nie pozwala na pełny, matematyczny opis tej gry i jej analizę teoretyczną. Już jednak analiza uproszczonych wersji pokera, jak i wyniki dostępnych badań empirycznych wskazują, że choć poker jest grą, w której losowość odgrywa niewątpliwą rolę, bardzo istotny jest również element umiejętności. To, który z tych efektów dominuje, zależy od tego (1) jak długi okres objąć analizą oraz (2) jakie są średnie wyniki gracza. Im dłuższy okres – tym znaczenie losowości (szczęścia) maleje. Podobnie, im większa wartość bezwzględna wygranych lub przegranych gracza, tym umiejętności (lub ich brak) szybciej zaczynają dominować nad losowością gry.

Odpowiadając na pytanie zawarte we wstępie można stwierdzić, że poker jest ‘grą umiejętności’, przynajmniej w takim samym stopniu jak inne gry, w których występują elementy losowości (np. golf). W długim okresie żaden z graczy nie może liczyć wyłącznie na szczęście – znaczenie elementu losowości zanika. Analiza empiryczna pokazuje, że profesjonalni gracze ten ‘długi okres’ mogą osiągnąć już po kilku tygodniach systematycznej gry. Dla graczy mniej umiejętności ‘długi okres’ przychodzi znacznie szybciej – im mniej potrafią (mają niższą wartość oczekiwaną z rozdania) tym szybciej się o tym przekonują, a ich prawdziwe wyniki wcześniej przestają być maskowane przez losowość gry.

Na zakończenie warto także zwrócić uwagę, że ocenie tego, czy poker jest ‘grą szczęścia’ czy ‘grą umiejętności’ poświęca się prawdopodobnie zbyt dużo uwagi. Pragmatyczne podejście do regulacji powinno kierować się nie tyle udziałem losowości w grze (w tym przypadku bowiem zakazane powinny być gry faktycznie czysto losowe, takie jak ruletka czy loterie) co porównaniem zysków i strat z regulacji. Do zysków zaliczyć powinno się między innymi wpływy z podatków, nowe miejsca

pracy i dobrobyt konsumentów, wynikający z tego, że gra w pokera zaspakaja ich pewne potrzeby – rozrywki, stymulacji intelektualnej, działania w warunkach kontrolowanego ryzyka. Do kosztów należałoby zaliczyć straty powodowane przez tzw. koszty zewnętrzne, związane np. z przestępstwami i uzależnieniami wynikającymi z pokera. Warto zauważyć, że współczesne metody ekonomiczne dysponują metodami kwantyfikacji i wyceny takich trudno-mierzalnych efektów. Dopiero przeprowadzenie takiej pełnej analizy zysków i strat mogłoby pozwolić na podjęcie decyzji o społecznie optymalnej formie regulacji pokera. Można jednak przypuszczać, że z punktu widzenia dobrobytu społecznego korzystniejsza byłaby regulacja zmierzająca do minimalizacji efektów zewnętrznych, niż całkowita delegalizacja pokera.

Bibliografia

- Fiedler, I. C. i J.-P. Rock. (2009), "Quantifying Skill in Games—Theory and Empirical Evidence for Poker" *Gaming Law Review and Economics* 13(1):50-57.
- Hope, P. i P. Sean McCulloch. (2009), "Statistical Analysis of Texas Hold'Em", digital, working paper available at <http://www.cigital.com/resources/gaming/poker/100M-Hand-AnalysisReport.pdf>.
- Ustawa... (2009), "Ustawa z dnia 19 listopada 2009 r. o grach hazardowych" w: *Dz.U. 2009 nr 201 poz. 1540*.
- Crosen, R., P. Fishman i D. Pope. (2008), "Poker superstars: Skill or luck?" *Chance* 21(4):25-28.
- DeDonno, M. A. i D. K. Detterman. (2008), "Poker Is a Skill" *Gaming Law Review* 12(1):31-36.
- Harrington, D. i B. Robertie. (2008), *Harrington on Cash Games, Volume I: How to Win at No-Limit Hold'em Money Games*, Two Plus Two Publishing.
- Harrington, D. i B. Robertie. (2008), *Harrington on Cash Games, Volume II: How to Win No-Limit Hold'em Money Games*, Two Plus Two Publishing.
- Hendrickx, R., P. E. M. Borm, B. B. V. d. Genugten i P. Hilbers. (2008), "Measuring Skill in More-Person Games with Applications to Poker", CentER Discussion Paper Series No. 2008-106. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1319271>.
- Alon, N. (2007), "Poker, Chance and Skill", Tel Aviv University, working paper, available at: www.tau.ac.il/~nogaa/PDFS/skill4.pdf.
- Kelly, J. M., Z. Dhar i T. Verbiest. (2007), "Poker and the Law: Is It a Game of Skill or Chance and Legally Does It Matter?" *Gaming Law Review* 11(3):190-202.
- Harrington, D. i B. Robertie. (2006), *Harrington on Hold 'em: Expert Strategies for No Limit Tournaments, Vol. 3: The Workbook*, Two Plus Two Publishing.
- Sklansky, D. i E. Miller. (2006), *No Limit Hold 'em: Theory and Practice*, Two Plus Two Publishing.
- Cabot, A. i R. Hannum. (2005), "Poker: Public Policy, Law, Mathematics, and the Future of an American Tradition" *Thomas M. Cooley Law Review* 22(3):443-514.
- Harrington, D. i B. Robertie. (2005), *Expert Strategy for No Limit Tournaments, Vol. 2: Endgame*, Two Plus Two Publishing.
- Dreef, M., P. Borm i B. van der Genugten. (2004), "A new relative skill measure for games with chance elements" *Managerial and Decision Economics* 25(5):255-264.
- Harrington, D. i B. Robertie. (2004), *Harrington on Hold 'em Expert Strategy for No Limit Tournaments, Vol. 1: Strategic Play*, Two Plus Two Publishing.
- Dreef, M., P. Borm i B. v. d. Genugten. (2003), "On Strategy and Relative Skill in Poker" *International Game Theory Review* 5(2):83-103.
- Billings, D., A. Davidson, J. Schaeffer i D. Szafron. (2002), "The challenge of poker" *Artificial Intelligence* 134(1-2):201-240.
- Dinkin, G. i J. Gitomer. (2002), *The Poker MBA: Winning in Business No Matter What Cards You're Dealt*, Crown Business.
- Kuhn, H. W. i S. Nasar. (2002), *The Essential John Nash*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Schmidt, C., ed. (2002), *Game Theory and Economic Analysis: a Quiet Revolution in Economics*, Routledge, New York, NY.
- Mazalov, V. V. i I. S. Makhankov. (2001), "On a Model of Two-Card Poker" *International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra* 11(5):97-105.

- Binmore, K. (1992), *Fun and games: a text on game theory*, D.C. Heath.
- Goldman, A. J. i J. J. Stone. (1960), "A Continuous Poker Game" *Duke Mathematical Journal* 27(1):41-53.
- Newman, D. J. (1959), "A Model for 'Real' Poker" *Operations Research* 7(5):557-560.
- Kuhn, H. W. (1950), "A Simplified Two-Person Poker" *Annals of Mathematics Studies* 24(12):97–103.
- McDonald, J. (1950), *Strategy in Poker, Business and War*, Norton.
- Nash, J. F. i L. S. Shapley. (1950), "A Simple Three-Person Poker Game" *Annals of Mathematics Studies* 24(12):105-116.
- von Neumann, J. i O. Morgenstern. (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, NJ.